RESUMEN DE CONCEPTOS TEÓRICOS

MATEMÁTICAS 3º ESO

Teorema fundamental de los radicales

Si se multiplican o dividen el índice del radical y el exponente del radicando por un mismo número natural distinto de cero, se obtiene un radical equivalente

$si \ a \geq 0$

$$\sqrt[n]{a^q} = \sqrt[n \cdot m]{a^{q \cdot m}}$$

$(m \neq 0)$

Teorema del resto

El teorema del resto permite conocer el resto de una división de un polinomio entre otro de la forma x-a, sin necesidad de realizarla

El resto R de la división de un polinomio P(x) entre x-a es igual al valor numérico del polinomio en x=a, es decir: R=P(a)

Teorema del factor

El teorema del factor nos permite conocer los factores de la forma x-a de un polinomio.

Este teorema es consecuencia directa del teorema del resto.

Si el valor numérico del polinomio P(x) en x=a es 0, entonces P(x) tiene como factor x-a y por tanto P(x) puede escribirse de la forma

$$P(x)=(x-a)\boxed{?}C(x)$$

Fórmula de Bhaskara

Dado el polinomio P(x), si se cumple que P(a)=0, sabemos por el teorema del resto que el resto de dividir P(x) entre x-a es 0:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

Deducción de la fórmula de Bhaskara

Vamos a partir de la forma general de una ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Forma general de la ecuación

Primero multiplicamos ambos miembros por 4a.

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

(multiplicar por 4a)

Restamos b^2 de ambos miembros

$$\underbrace{4a^2x^2 + 4abx + b^2}_{} - b^2 + 4ac = 0$$

(completamos el cuadrado)

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$$

Despejar x

Despejamos la x $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

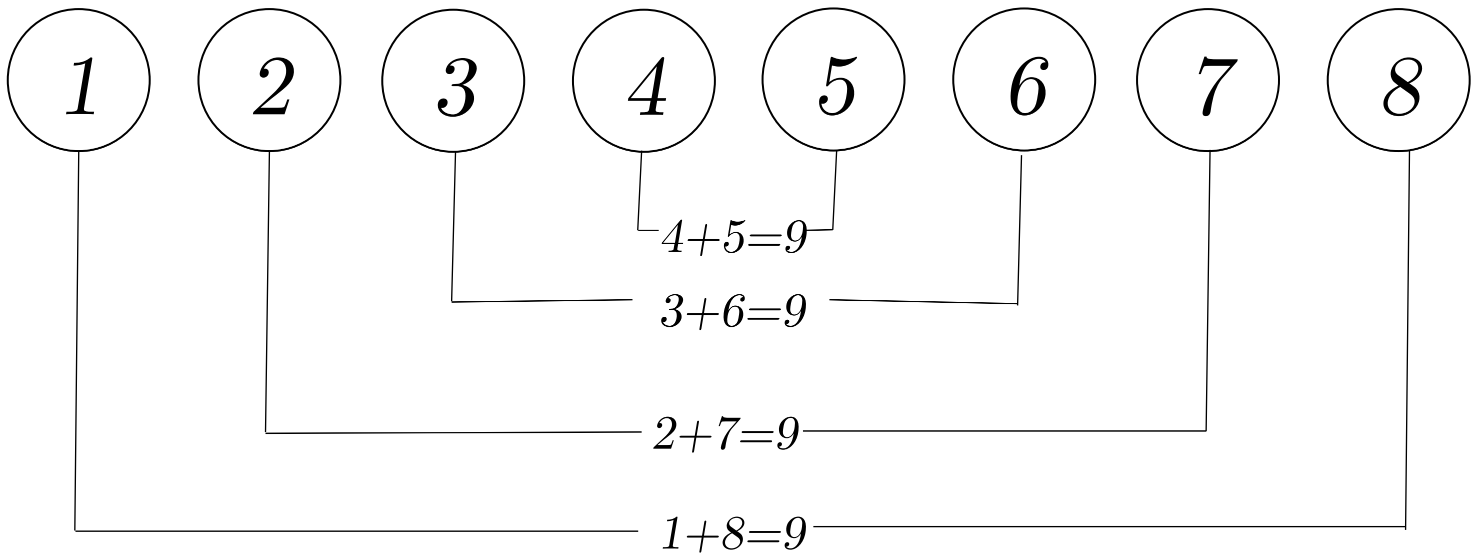
$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

En realidad son dos soluciones (una para + otra para -)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

Para la Suma de n-términos consecutivos de una progresión aritmética



$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=cte$$

Arriba se han escrito los ocho primeros términos de la progresión aritmética de término general $a_n = n+1$*. Se comprueba que la suma de los términos primero y último es igual a* ***la suma de dos términos equidistantes a éstos****. Esta importante propiedad va a permitir determinar la suma de todos los términos de una progresión aritmética, por grande que ésta sea.*

Suma de n-términos consecutivos de una progresión aritmética

La suma de los n-términos de una sucesión aritmética y la misma suma de términos ordenados de forma inversa

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$2S_n = \left(a_1 + a_n\right) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + \left(a_{n-1} + a_2\right) + \left(a_n + a_1\right)$$

Sumamos término a término y agrupamos por parejas los términos que se encontrarían equdistantes

Suma de n-términos consecutivos de una progresión aritmética

Observamos que si sumamos términos equidistantes es igual a la suma de los términos primero y último.

$$\begin{array}{ccc} a_2 = a_1 + d & a_3 = a_1 + 2d & a_{n-1} = a_1 + n \cdot d \\ a_{n-1} = a_n - d & a_{n-2} = a_n - 2d \quad (\ldots) & a_2 = a_n - n \cdot d \\ \hline a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n & a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n & a_{n-1} + a_2 = a_1 + a_n \end{array}$$

Sustituimos en la expresión anterior cada pareja de términos equidistantes por la suma del primero más el último.

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

Despejamos S_n.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

Suma de n-términos consecutivos de una progresión geométrica

La suma de los n-términos de una sucesión geométrica se puede escribir como:

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n} \quad (1)$$

Multiplicando por la razón r en cada término de la ecuación

$$r \cdot S_n = r \cdot \left(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \right)$$

Aplicamos distributiva

$$r \cdot S_n = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + r \cdot a_3 + \ldots + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n$$

Por tratarse de una progresión geométrica cuando multiplicamos un término por la razón r, obtenemos el término siguiente, por ello, la expresión quedaría así:

$$\boxed{r \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + r \cdot a_n} \quad (2)$$

TEMA 4

Suma de n-términos consecutivos de una progresión geométrica

Partiendo las expresiones (1) y (2) obtenidas con anterioridad y restándolas término a término

$$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + r \cdot a_n \qquad (2)$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \qquad (1)$$

$$r \cdot S_n - S_n = -a_1 + \left(\cancelto{0}{a_2 - a_2}\right) + \left(\cancelto{0}{a_3 - a_3}\right) + \ldots + \left(\cancelto{0}{a_n - a_n}\right) + r \cdot a_n$$

$$r \cdot S_n - S_n = -a_1 + r \cdot a_n$$

Sacamos factor común S_n $\quad S_n(r-1) = r \cdot a_n - a_1$

Suma de n-términos consecutivos de una progresión geométrica

Despejamos S_n

$$\boxed{S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r - 1}}$$

Si expresáramos $a^n = a_1 \cdot r^{n-1}$ *tendríamos*

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r - 1} = \frac{r \cdot a_1 \cdot r^{n-1} - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$$

Otra forma de expresar la suma de n-términos

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}}$$