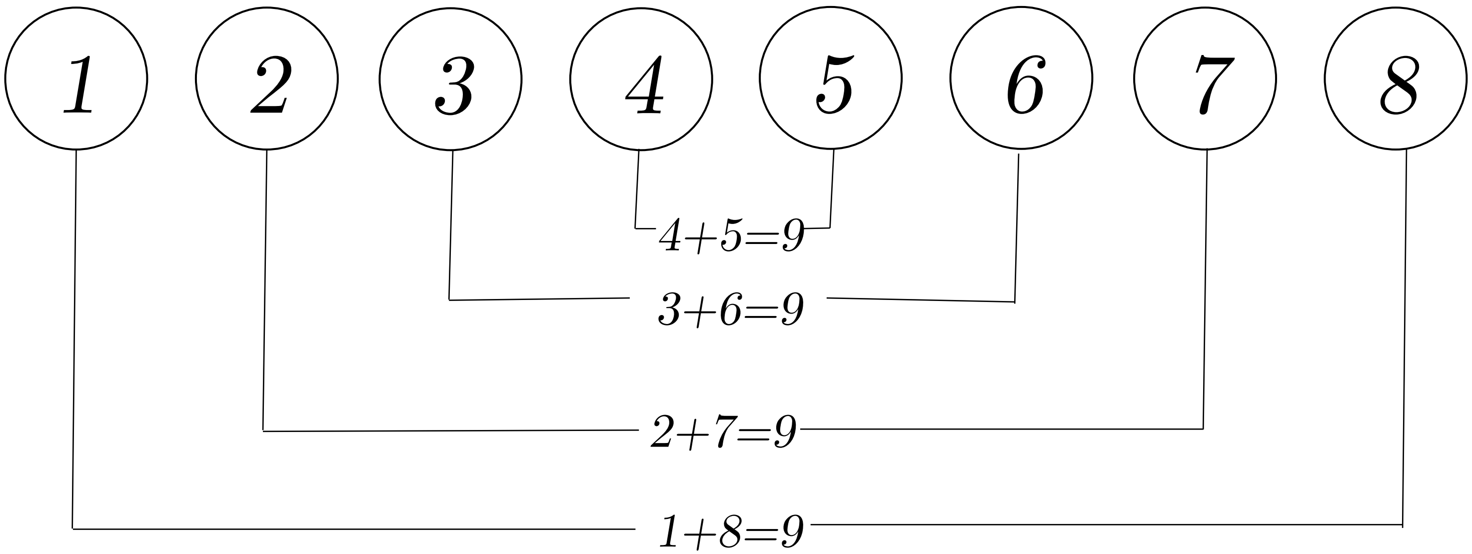
DEMOSTRACIÓN DE LA SUMA N-TERMINOS

Progresión aritmética y progresión geométrica

Para la Suma de n-términos consecutivos de una progresión aritmética



$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=cte$$

Arriba se han escrito los ocho primeros términos de la progresión aritmética de término general $a_n = n+1$. *Se comprueba que la suma de los términos primero y último es igual a* ***la suma de dos términos equidistantes a éstos****. Esta importante propiedad va a permitir determinar la suma de todos los términos de una progresión aritmética, por grande que ésta sea.*

Suma de n-términos consecutivos de una progresión aritmética

La suma de los n-términos de una sucesión aritmética y la misma suma de términos ordenados de forma inversa

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$2S_n = \left(a_1 + a_n\right) + \left(a_2 + a_{n-1}\right) + \left(a_3 + a_{n-2}\right) + \ldots + \left(a_{n-2} + a_3\right) + \left(a_{n-1} + a_2\right) + \left(a_n + a_1\right)$$

Sumamos término a término y agrupamos por parejas los términos que se encontrarían equdistantes

Suma de n-términos consecutivos de una progresión aritmética

Observamos que si sumamos términos equidistantes es igual a la suma de los términos primero y último.

$$a_2 = a_1 + d \qquad a_3 = a_1 + 2d \qquad (\ldots) \qquad a_{n-1} = a_1 + n \cdot d$$

$$a_{n-1} = a_n - d \qquad a_{n-2} = a_n - 2d \qquad a_2 = a_n - n \cdot d$$

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n \qquad a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n \qquad a_{n-1} + a_2 = a_1 + a_n$$

Sustituimos en la expresión anterior cada pareja de términos equidistantes por la suma del primero más el último.

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

Despejamos S_n.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

Suma de n-términos consecutivos de una progresión geométrica

La suma de los n-términos de una sucesión geométrica se puede escribir como:

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n} \quad (1)$$

Multiplicando por la razón r en cada término de la ecuación

$$r \cdot S_n = r \cdot \left(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \right)$$

Aplicamos distributiva

$$r \cdot S_n = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + r \cdot a_3 + \ldots + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n$$

Por tratarse de una progresión geométrica cuando multiplicamos un término por la razón r, obtenemos el término siguiente, por ello, la expresión quedaría así:

$$\boxed{r \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + r \cdot a_n} \quad (2)$$

Suma de n-términos consecutivos de una progresión geométrica

Partiendo las expresiones (1) y (2) obtenidas con anterioridad y restándolas término a término

$$\boxed{\begin{aligned} r \cdot S_n &= a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + r \cdot a_n \quad (2) \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \quad (1) \end{aligned}}$$

$$r \cdot S_n - S_n = -a_1 + \left(\cancelto{0}{a_2 - a_2}\right) + \left(\cancelto{0}{a_3 - a_3}\right) + \ldots + \left(\cancelto{0}{a_n - a_n}\right) + r \cdot a_n$$

$$r \cdot S_n - S_n = -a_1 + r \cdot a_n$$

Sacamos factor común S_n $\quad S_n(r-1) = r \cdot a_n - a_1$

Suma de n-términos consecutivos de una progresión geométrica

Despejamos S_n

$$\boxed{S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r - 1}}$$

Si expresáramos $a^n = a_1 \cdot r^{n-1}$ *tendríamos*

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r - 1} = \frac{r \cdot a_1 \cdot r^{n-1} - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$$

Otra forma de expresar la suma de n-términos

$$\boxed{S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r - 1}}$$

mal educados